Дәріс 10

Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі. Есептің қойылуы. Жылу өткізгіш-тік теңдеуінің фундаментальды шешімі.

1. *Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі*

Параболалық типке жататын теңдеулердің қарапайымы

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_x x_i} - u_t = 0 \qquad (1)$$

теңдеу. Әдетте бұл теңдеуді жылу өткізгіштік теңдеуі деп атайды. Осытеңдеуді

$$u(x)\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (2)$$

бастапқы шартпен шешу-Коши есебі деп аталады.

Бұл (1)-(2) Коши есебінің шешімі:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} dy, t > 0, \qquad (3)$$

Мұндағы $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = G(x,t)$ жылу өткізгіштік теңдеудің іргелі шешімі немесе жылу күзі деп аталады, ал (3)-өрнекті Пуассон формуласы деп атайды.

Бітекті емес Коши есебін

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), t > 0, x \in (-\infty, \infty) \qquad (4)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in (-\infty, \infty) \qquad (5)$$

қарастырайық.

Бұл есептің шешімін $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ түрінде іздейміз. Мұндағы $u_1(x,t)$ функция жоғарыдағы біртекті теңдеу үшін қойылған есептің шешуі, яғни $u_1(x,t)$ үшін (3) өрнек орынды, ал $u_2(x,t)$ функция

$$u_{2t} - u_{2xx} = g(x,t), u_2(x,t)\big|_{t=0} = 0, x \in (-\infty, +\infty), t > 0 \qquad (6)$$

есептің шешімі. Соңғы (6) есепті шешу үшін

$$v_t - v_{xx} = 0, v(x,t)\big|_{t=0} = g(x,\tau), x \in (-\infty, \infty), t > \tau \qquad (7)$$

көмекші есеп құрамыз. Бұл көмекші есеп үшін де (3) формула орынды., бірақ $t > \tau$ екені керек. Сонда (6) есептің шешімі (Дюамель қағидасы).

$$u_2(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau) d\tau \qquad (8)$$

болады, демек

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}dy+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\frac{td\tau}{\sqrt{\pi \backslash t-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}}f(y,\tau)dy \tag{9}$$

Ал $n\geq 2$ үшін (4)-(5) Коши есебінің шешімі

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{R^n}e^{\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)d\xi+$$
$$+\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{R^n}\frac{1}{[\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi \tag{10}$$

мұндағы $|x-\xi|^2=\sum(x_i-\xi_i)^2$; бұл өрнекті Пуассон формуласы деп атайды. Мына:

$$u_t=a^2\Delta u(x,t), x\in R^n$$
$$u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x), x\in(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$$

Коши есебінің шешімі кейде

$$u(x,t)=\sum\frac{a^{2k}t^k}{k!}\Delta^k u_0(x) \tag{11}$$

жинақты қатармен анықталады.

2. *Жылуөткізгіштік теңдеуі. Фундаменталдық шешім.* Физика (жылудың таралуы, диффузия құбылыстары және с.с) таралу құбылыстары әр түрлі нақты табиғи жорамалдау нәтижесінде

$$\rho(\bar{x})\frac{\partial U}{\partial t}(\bar{x},t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(\bar{x})\frac{\partial U(\bar{x},t)}{\partial x_k}\right)-g(\bar{x})\,U(\bar{x},t)+F(\bar{x},t) \tag{8.1.1}$$

түріндегі теңдеуге келтіріледі. Мұндағы $(\bar{x},t)\in R^{n+1}_{x,t}$; $\rho(\bar{x})$, $p(\bar{x})$, $g(\bar{x})$-зерттелетін ортаның қасиеттеріне байланысты коэффициенттер, $F(\bar{x},t)$-жылу көзін сипаттайтын шама. Егер $\rho(\bar{x}),\ p(\bar{x})=const,\quad g(\bar{x})\equiv 0$ болса, онда (8.1.1) теңдеуі

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\bar{x},t)=a^2\Delta U+f(\bar{x},t),\ \left(\frac{p}{\rho}=a^2,\quad \frac{F(\bar{x},t)}{\rho}=f(\bar{x},t)\right) \tag{8.1.2}$$

түріне келеді. Бұл теңдеуді жылу өткізгіштік теңдеуі деп атайды.

$n=3$ болғанда кезде

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}\right)+f(x_1,x_2,\ x_3,t) \tag{8.1.3}$$

теңдеуі кеңістікте орналасқан изотропты қатты дененің бойында таралатын жылуды сипаттайды.

$t_1=a\cdot t,\ \bar{x}=\bar{x}$ алмастыруы (8.1.2) теңдеуін

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = \Delta U + \tilde{f}(\bar{x}, t_1) \qquad (8.1.4)$$

түрінде жазуға мүмкіндік береді. (8.1.4) теңдеуі үшін характеристикалық форма $Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) = 0 \cdot \lambda_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(-\lambda_k^2)$ түрінде анықталатын болғандықтан 2.1.3 – анықтама бойынша $R_{x,t}^{n+1}$ кеңістігінің барлық нүктелерінде жылуөткізгіштік теңдеуі параболалық типке жатады.

Тікелей қою арқылы

$$\mathrm{E}(\bar{x}, t) = \frac{1}{(t - t_0)^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{4(t - t_0)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right] \qquad (8.1.5)$$

функциясы кез келген $\bar{y} \in R^n$ және $t > t_0$ болған кезде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U \qquad (8.1.6)$$

теңдеуінің шешімі болатындығын көрсетуге болады. Шынында, да

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{2(t - t_0)} E(\bar{x}, t) + \frac{x_i - y_i}{4(t - t_0)^2} E(\bar{x}, t), \qquad \frac{\partial E}{\partial x_i^2} = -\frac{n}{2(t - t_0)} E(\bar{x}, t) + \frac{E(\bar{x}, t)}{4(t - t_0)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$$

Бұдан $\frac{\partial E}{\partial t} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}$ тепе-теңдігін аламыз. (8.1.5) формуласы арқылы анықталған $E(\bar{x}, t)$ функциясын (8.1.6) теңдеуінің *фундаменталдық шешімі* деп атайды.